LM JUNI 2016 - Løsninger (1)

Opgave 1

Vi kan løse 1+2+3 samtidigt.

1+2+3)

$Lx = y$ har totalmatrix:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & y_1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & y_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & y_3 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2 - R_3]{R_1 - R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & y_1 - y_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & y_2 - y_3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & y_3 \end{bmatrix}$$

Vi sætter $x_4 = s$ og $x_5 = t$ og få

$$x_3 + x_4 = y_3 \rightarrow x_3 = y_3 - s$$

$$x_1 + x_5 = y_1 - y_2 \rightarrow x_1 = y_1 - y_2 - t$$

$$x_2 = y_2 - y_3$$

$Lx = y$ har løsningen

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 - y_2 \\ y_2 - y_3 \\ y_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \underbrace{s \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{N(L)}, \quad s, t \in \mathbb{R},$$

Heraf fås at $(0,0,-1,1,0)$, $(-1,0,0,0,1)$ er en basis for $N(L)$, hvorfor L ikke er injektiv.

Søjlerne $(1,0,0)$, $(1,1,0)$, $(1,1,1)$ er lin. uafh. og udgør en basis for $R(L)$.

Da $\dim(R(L)) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ er $R(L) = \mathbb{R}^3$
og L er surjektiv.

Dimensionssætningen:

$$5 - \dim(N(L)) = \dim(R(L))$$
$$5 - 2 = 3$$

OK

4) Første række i ligningen $Lx = \bar{0}$ er identisk med $Tx = \bar{0}$, så $Lx = \bar{0} \Rightarrow Tx = \bar{0}$

Eller $x \in N(L) \Rightarrow x = (-t, 0, -s, s, t)$.
Da er
$Tx = -t + 0 - s + s + t = 0$, dvs $x \in N(T)$.
Derfor er $N(L) \subset N(T)$.

Opgave 2

1) Asymmetrisk, så $v_1 \cdot v_2 = v_1 \cdot v_3 = v_2 \cdot v_3 = 0$

Heraf fås $x_1 + x_2 = 0$ og $x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$

Heraf fås at $v_3 = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$.

Vi kan vælge $v_3 = (-1, 1, 1)$.

③

2) Vi ved at $A = QDQ^T$, hvor Q er ortogonal (med de normerede egenvektorer som søjler) og

$$D = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{bmatrix}$$

Det ses at $D^2 = E = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$, hvorfor

$$A^2 = QD^2Q^T = QQ^T = E.$$

3) $A^3 - A^2 = Q(D^3 - D^2)Q^T$, hvor

$$D^3 - D^2 = D - E = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & -2 \end{bmatrix}.$$

Heraf ses at 0 er en (dobbelt) egenværdi, så $A^3 - A^2$ er <u>ikke</u> regulær.

4) $\det(e^A) = e^1 e^1 e^{-1} = \underline{\underline{e}}.$

5) Da $A^2 = E$ er $A^{-1} = A$, hvorfor

$$A^{-1}v_2 = Av_2 = 1 \cdot v_2 = (1,-1,2).$$

6) $A^{2k+1} = A^{2k}A = EA = A$, så

$$A^{2k+1}(v_1 + v_2 + v_3) = Av_1 + Av_2 + Av_3 = 1v_1 + 1v_2 - 1v_3$$
$$= (3,-1,1).$$

opgave 3

1) $\int \cos(ax)\cos(bx)\cos(cx)\,dx =$

$$\frac{1}{8}\int \left(e^{iax}+e^{-iax}\right)\left(e^{ibx}+e^{-ibx}\right)\left(e^{icx}+e^{-icx}\right)dx =$$

$$\frac{1}{8}\int \left(e^{i(a+b+c)x}+e^{-i(a+b+c)x}\right)+\left(e^{i(a-b+c)x}+e^{-i(a-b+c)x}\right)$$
$$+\left(e^{i(a+b-c)x}+e^{-i(a+b-c)x}\right)+\left(e^{i(a-b-c)x}+e^{-i(a-b-c)x}\right)dx$$

$$=\frac{1}{4}\int \cos(a+b+c)x+\cos(a-b+c)x+\cos(a+b-c)x+\cos(a-b-c)x\;dx$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{\sin(a+b+c)x}{a+b+c}+\frac{\sin(a-b+c)x}{a-b+c}+\frac{\sin(a+b-c)x}{a+b-c}+\frac{\sin(a-b-c)x}{a-b-c}\right)+k.$$

2)

$$z^{-2}=\frac{1}{2}(1-i) \Leftrightarrow$$

$$z^2=\frac{2}{1-i}=\frac{2\cdot(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{2(1+i)}{2}=1+i$$

$\boxed{z^2=1+i}$. Skriv $z=x+iy$, $x,y\in\mathbb{R}$

$z^2=x^2-y^2+i2xy$, hvorfor

$x^2 - y^2 = 1$

$2xy = 1$. Da er x og $y \neq 0$ så $y = \frac{1}{2x}$

hvorfor $x^2 - \left(\frac{1}{2x}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow$

$4x^4 - 1 = 4x^2 \Leftrightarrow$

$4x^4 - 4x^2 - 1 = 0$. Lad $u = x^2 > 0$

$4u^2 - 4u - 1 = 0$

$$u = \frac{4 \pm \sqrt{16+16}}{2 \cdot 4} = \frac{4 \pm \sqrt{32}}{2 \cdot 4} = \frac{4 \pm 4\sqrt{2}}{8}$$

Da $u > 0$ fås $x^2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$, hvorfor

$$x = \pm \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Heraf fås at (da $y = \frac{1}{2x}$ og $z = x + iy$)

$$z = \pm \left(\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}} \right)$$

opgave 4

Her er $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (g(x))^n$, hvor

$$g(x) = \frac{1}{x^4 - 2x^2 + 1} = \frac{1}{(x^2-1)^2} = (x^2-1)^{-2}$$

1+2) Veldefineret når $|g(x)| < 1$, dvs

$$\left| \frac{1}{(x^2-1)^2} \right| < 1 \quad \text{, dvs}$$

$$\frac{1}{(x^2-1)^2} < 1 \quad \text{, hvorfor}$$

$$1 < (x^2-1)^2 \iff$$

$$\underbrace{(x^2-1) < -1}_{\text{falsk}} \text{ eller } 1 < (x^2-1)$$

Da fås $x^2 > 2$, hvorfor $\underline{x < -\sqrt{2}}$ eller $\underline{x > \sqrt{2}}$

f veldefineret for $x \in M =]-\infty, -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, \infty[$.

med $f(x) = \frac{1}{1-g(x)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{(x^2-1)^2}} = \frac{(x^2-1)^2}{(x^2-1)^2 - 1}$

3) Da $f'(x) = \frac{g'(x)}{(1-g(x))^2}$ har f og g samme monotoniforhold.

$$g'(x) = -2(x^2-1)^{-3}\cdot 2x .$$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, ikke i M.

For $x \in M$ er $(x^2-1) > 0$, hvorfor

$g'(x) > 0$ for $x < -\sqrt{2}$ og $g'(x) < 0$ for $x > \sqrt{2}$.

f er altså voksende i $]-\infty, -\sqrt{2}[$ og aftagende i $]\sqrt{2}, \infty[$.

4) For $x \to \pm\infty$ vil $f(x) \to 1$

~~For $x \to \pm\sqrt{2}^{+}$ vil~~

For $x \to -\sqrt{2}^-$ og $x \to \sqrt{2}^+$ vil $f(x) \to \infty$.

$Vm(f) =]1, \infty[$. Heraf ses at f ikke er injektiv.

5) $f(x) = y \quad , \; y > 1,$

$$\frac{1}{1-g(x)} = y \iff \frac{1}{y} = 1 - g(x) \iff g(x) = \frac{y-1}{y}$$

Så fås

$$\frac{1}{(x^2-1)^2} = \frac{y-1}{y} \iff (x^2-1)^2 = \frac{y}{y-1}$$

$$\iff \quad x^2 - 1 = \pm\sqrt{\frac{y}{y-1}} .$$

Men da $x^2-1>0$ for $x \in M$ skal $-$ forkastes!

Så er $\quad x^2 = 1 + \sqrt{\frac{y}{y-1}} \iff$

$$x = \pm\sqrt{1+\sqrt{\frac{y}{y-1}}} .$$

Heraf ses også, da $y>1$, at f ikke er injektiv, da ligningen har 2 løsninger.